

beweise zur Übung

Variante der dominierten Konvergenz:

$$\left\{ \begin{array}{l} g, g_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \lambda\text{-summierbar,} \\ f_k, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \lambda\text{-messbar,} \\ |f_k| \leq |g_k|, \quad \lambda\text{-f.ü.,} \\ f_k \rightarrow f, \quad g_k \rightarrow g \quad \text{p.w. } \lambda\text{-f.ü.} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\int_X |f_k - f| d\lambda \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$



Frage: Was kann man aus der

integralen Konvergenz $\int_X |f_k - f| d\lambda \rightarrow 0$

ableiten?

Satz 25.8 : Seien $f_k, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

λ -summierbar mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\lambda = 0.$$

Dann gilt $f_k \rightarrow f$ dem Maße nach,
eine Teilfolge konvergiert also λ -
f.ü., punktweise gegen f .

Beweis: Die 2^{te} Aussage folgt aus
der 1^{ten} mit dem Satz von Riesz.

Sei für $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$

$$E_k^-(s) := \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq s\}$$

(Zeige: $\mu(E_k^-(s)) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$)

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k \geq k_0 \quad \int |f_k - f| d\mu < \varepsilon \cdot \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \forall k \geq k_0: \mu(E_k^-(s)) =$$

$$\frac{1}{s} \mu \wedge (E_k^-(s)) \leq \frac{1}{s} \int_{E_k^-(s)} |f_k - f| d\mu$$

$$\leq \frac{1}{s} \int |f_k - f| d\mu < \varepsilon$$

$$\text{M.a. W. : } \lim_{k \rightarrow \infty} \mu \wedge (E_k^-(s)) = 0.$$



Produkte von Maßen,Satz von Fubini und Anwendungen

ein Ziel: $\int f(x) d\mathcal{L}^n(x) \stackrel{?}{=}$

$$\int \left(\dots \left(\int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

Def 25.4

 (Produktmaß)

Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y
 (beliebige Mengen). Das Produkt-
maß $\lambda \times \rho$ auf $X \times Y$ wird
 definiert durch ($G \subset X \times Y$)

$$(\lambda \times \rho)(G) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \rho(B_i) : \right.$$

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \text{ mit}$$

beliebigen Mengen $A_i \subset X, B_i \subset Y$

Konvention für $\lambda(A_i) \rho(B_i)$: $\boxed{0 \cdot \infty = 0}$

Satz 25.9 :

$\lambda \times \rho$ ist ein (äußeres)
Maß auf $X \times Y$.

Bew: Die Def. von $(\lambda \times \rho)(G)$ als
"inf" ist analog zur Bildung von
 $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Die Maßeigenschaften prüfe
man wie dort (Übung!)



Bem: 1.) offenbar gilt für $A \subset X$ und

$B \subset Y$ die Abschätzung

$$(*) \quad (\lambda \times \rho)(A \times B) \leq \lambda(A) \rho(B)$$

2.) Man zeige:

$\lambda \times \rho$ ist das Supremum aller Maße
auf $X \times Y$ mit $(*)$ ($\rightarrow$ p. 333^a)

In $(*)$ gilt i.a. wirklich " $<$ ". Wir
diskutieren später, wann " $=$ " eintritt.

3.) endliche Produkte

$$\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$$

auf $X_1 \times \dots \times X_n$ definiert man

Maximalität von $\lambda \times \rho$

~~4a~~
-333-

Sei μ Maß auf $X \times Y$ mit

$$(1) \mu(A \times B) \leq \lambda(A) \rho(B) \quad \forall A \subset X, B \subset Y$$

Beh:

$$\mu \leq \lambda \times \rho$$

Bew: Sei $C \subset X \times Y$; zu $\varepsilon > 0$ wähle

$$A_i \subset X, B_i \subset Y \quad \text{mit} \quad C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \rho(B_i) \leq (\lambda \times \rho)(C) + \varepsilon$$

$$\text{Es ist} \quad \mu(C) \stackrel{\text{Mon.}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) \stackrel{\text{Mon.}}{\leq}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \times B_i) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \rho(B_i) \leq$$

$$(\lambda \times \rho)(C) + \varepsilon$$

□

rekursiv; es gilt das Assozia- -334-
tiengesetz, also

$$(\lambda_1 \times \lambda_2) \times \lambda_3 = \lambda_1 \times (\lambda_2 \times \lambda_3),$$

man muss daher keine Klammern setzen.

In diesem Sinne hat man

Satz 25.10	$\mathcal{L}^{n+m} = \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ $\text{auf } \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
------------	--

sowie $\underbrace{\mathcal{L}^1 \times \dots \times \mathcal{L}^1}_{n\text{-fach}} = \mathcal{L}^n \text{ auf } \mathbb{R}^n$

Beweis:



folgt als

Korollar

$$\text{Auf } \mathbb{R}^n \text{ ist } \mathcal{L}^n = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \dots \times \mathcal{L}^1}_{n\text{-fach}}$$

~~5~~
-335-

↙ Bew von Satz 25.10 : Es ist zunächst

$$\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m \leq \mathcal{L}^{n+m} \quad (1)$$

denn :

$$\forall G \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\mathcal{L}^{n+m}(G) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n+m}(Q_i) : \right.$$

$$Q_i = Q_i^{(n)} \times Q_i^{(m)} \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{Quader mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supset G \}$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i^{(n)}) \cdot \mathcal{L}^m(Q_i^{(m)}) : \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i) \cdot \mathcal{L}^m(B_i) : A_i \subset \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. B_i \subset \mathbb{R}^m \text{ beliebig mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \supset G \right\} \\ = (\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m)(G)$$

(da rechts von $\geq$ " das inf über eine größere Menge von Zahlen gebildet wird).

Man beachte weiter die Gültigkeit von

~~6~~
-336-

$$(2) \quad \mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \leq \mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B),$$
$$\forall A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m. \quad (\text{S.u.})$$

M.a.W.: Das Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ hat die Eigenschaft $(*)$.

$\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ ist aber das größte Maß dieser Art,

d.h.

$$\mathcal{L}^{n+m} \leq \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m.$$

Mit (1) folgt

die Behauptung.

ad (2): Sei $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$

mit Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{Q}_j \subset \mathbb{R}^m$, wobei

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^m(B)$$

mit gegebenem $\varepsilon > 0$. Es ist

$$A \times B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \overbrace{Q_i \times \tilde{Q}_j}^{\text{Quader in } \mathbb{R}^{n+m}},$$

$$\text{also: } \mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) \right) \leq$$

~~337~~
-337-

$$\mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B) + \varepsilon [\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^m(B)] + \varepsilon^2$$

Da man o.E. $\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(B) < \infty$ annehmen darf, folgt (2) mit $\varepsilon \downarrow 0$. □

Alternativ kann man zeigen, dass $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes für das $\mathcal{L}^{n+m}$ Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ erfüllt, also $= \mathcal{L}^{n+m}$ sein muss. □

Die Volumenberechnung durch Schnitte bzw. die Berechnung von Integralen durch iterierte Mehrfachintegrale geht nun mit

Satz 25.11 : (von Fubini)

Seien λ und ρ Maße auf den Mengen X und Y . Dann gilt :

i) $\lambda \times \rho$ ist ein reguläres Maß

auf $X \times Y$, d.h. zu $A \subset X \times Y$
existiert $B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \rho}$ mit

$$A \subset B, \quad (\lambda \times \rho)(A) = (\lambda \times \rho)(B).$$

(„maßgleiche messbare Obermenge“)

ii) $A \in \mathcal{M}_\lambda, B \in \mathcal{M}_\rho \implies$

$A \times B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \rho}$ mit (i.a. ja nur)
 $\downarrow \leq$

$$(\lambda \times \rho)(A \times B) = \lambda(A) \rho(B)$$

iii) Sei $S \subset X \times Y$ σ -endlich
bzgl. $\lambda \times \rho$, d.h. es gibt

$$S_k \in \mathcal{M}_{\lambda \times \rho} \text{ mit}$$

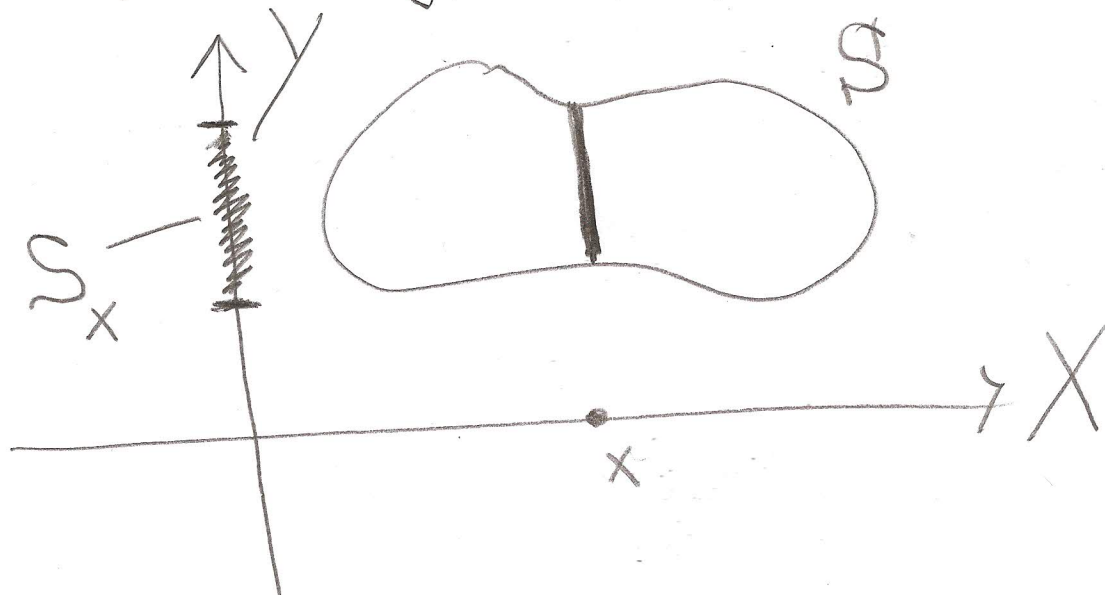
$$(\lambda \times \rho)(S_k) < \infty \text{ und } S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Dann gilt: Die Schnitte

$$S_y := \{x \in X : (x, y) \in S\}, y \in Y,$$

$$S_x := \{y \in Y : (x, y) \in S\}, x \in X,$$

sind λ - bzw. ρ -messbar für
 ρ -fast alle y bzw. für λ -f.a. x .



Die Funktion

$\gamma \ni y \mapsto \lambda(S_y)$ ist ρ -int'bar,

$X \ni x \mapsto \rho(S_x)$ ist λ -int'bar

mit

$$(\lambda \times \rho)(S) = \int_X \rho(S_x) d\lambda(x)$$

$$\int_Y \lambda(S_y) d\rho(y)$$

(„Volumen“ von S = Aufintegration
der Schnittflächen in beliebiger
Reihenfolge) // Prinzip von
Cavalieri ”

iv) Ist $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$(\lambda \times \rho)$ -integrierbar, und ist

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) \neq 0\}$$

σ -endlich bzgl. $\lambda \times \rho$ (z.B. wenn

f $(\lambda \times \rho)$ -summierbar), so ist

$$Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) d\lambda(x) \quad \underline{\rho\text{-int'bar}},$$

$$X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y) d\rho(y) \quad \underline{\lambda\text{-int'bar}}$$

mit

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\lambda \times \rho)(x, y) =$$

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\rho(y) \right) d\lambda(x) =$$

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y) d\lambda(x) \right) d\rho(y)$$

(iterierte Integrale)

Bem: 1.) iii) $\Rightarrow$ iv) (via Treppenfktn)

2.) Beweis: Federer, p. 115 f.

3.) „ σ -Endlichkeit“ in iii) und iv)
ist erforderlich, sonst sind die
 Formeln i.a. falsch! ∇

Bspl: Seien

$$X = Y = \mathbb{R}, \quad \lambda = \mathcal{L}, \quad \rho = \mathcal{L}$$